§. 18

Wiewohl eine jede Größe, überhaupt jeder Gegenstand, der uns in irgendeiner Beziehung für unendlich gelten soll, sich in eben dieser Beziehung muss betrachten lassen als ein aus einer unendlichen Menge von Teilen bestehendes Ganzes: | so gilt doch nicht umgekehrt, dass jede |21[Größe, welche wir als die Summe einer unendlichen Menge anderer, die alle endlich sind, betrachten, selbst eine unendliche sein müsse. So wird z. B. allgemein anerkannt, dass die irrationalen Größen, wie $\sqrt{2}$, in Bezug auf die bei ihnen zu Grunde liegende Einheit endliche Größen sind, obgleich sie angesehen werden können als zusammengesetzt aus einer unendlichen Menge von Brüchen von der Form

$$\frac{14}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000} + \ldots,$$

deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind; ebenso, dass die Summe der unendlichen Reihe Summanden von der Form: $a + ae + ae^2 + \cdots$ in inf. der endlichen Größe $\frac{a}{1-e}$ gleichkomme, so oft $e < 1$ ist [1].

[1] Da der gewöhnliche Beweis für die Summierung dieser Reihe nicht völlig strenge scheint, sei es erlaubt, bei dieser Gelegenheit folgenden anzudeuten. Nehmen wir $a = 1$ und e positiv an (weil die Anwendung auf andere Fälle sich von selbst ergibt), und setzen wir als symbolische Gleichung

$$S = 1 + e + e^2 + \cdots \text{ in inf.}, \tag{1}$$

so ist wenigstens so viel gewiss, dass S eine positive, gleichviel ob

2 Größe] Grösse **3** irgendeiner] irgend einer **4** lassen] lassen, **5** Teilen] Theilen **7** Größe] Grösse **10** Größen] Grössen **11** Größen] Grössen **15** ...] .... **16** ebenso] eben so **18** in inf.] in inf. $= \frac{a}{1-e}$ **18** Größe] Grösse **20** Summierung] Summirung **25** $S = 1 + e + e^2 + \cdots$ in inf.,] $S = 1 + e + e^2 +$ ..... in inf.

|26| In der Behauptung | also, dass eine Summe von un-
|27| endlich vielen endlichen Größen | selbst doch nur eine

endliche oder unendlich große, Größe bezeichne. – Es ist aber auch für jeden beliebigen ganzzähligen Wert von n

$$S = 1 + e + e^2 + \cdots + e^{n-1} + e^n + e^{n+1} + \cdots \text{ in inf.},$$

oder auch

$$S = \frac{1 - e^n}{1 - e} + e^n + e^{n+1} + \cdots \text{ in inf.}, \tag{2}$$

wofür wir auch

$$S = \frac{1 - e^n}{1 - e} + P_1 \tag{3}$$

schreiben können, wenn wir den Wert der unendlichen Reihe $e^n + e^{n+1} + \cdots$ in inf. durch P_1 bezeichnen; wobei wir wenigstens dies sicher wissen, dass P_1 eine von e und n abhängige, messbare oder unmessbare, jedenfalls aber positive Größe bezeichnet. Dieselbe unendliche Reihe können wir aber auch auf folgende Art darstellen:

$$e^n + e^{n+1} + \cdots \text{ in inf.} = e^n[1 + e + \cdots \text{ in inf.}].$$

Hier hat nun die aus unendlich vielen Gliedern bestehende Summe in den Klammern auf der rechten Seite der Gleichung, nämlich

$$[1 + e + e^2 + \cdots \text{ in inf.}],$$

zwar ganz das Aussehen der in der symbolischen Gleichung $(1) = S$ gesetzten Reihe, ist aber gleichwohl mit ihr nicht für einerlei zu halten; indem die *Menge* der Summanden hier und in (1), obwohl beidemal unendlich, doch nicht dieselbe ist; sondern hier unstreitig *um n Glieder weniger hat* als in (1).

Wir können also mit voller Zuversicht nur die Gleichung $[1 + e + e^2 + \cdots + \text{in inf.}] = S - P_2$ ansetzen, wobei wir annehmen dürfen, dass P_1 jedenfalls eine von n abhängige, stets positive Größe bezeichne. Sonach erhalten wir

2 Größen] Grössen **3** große] grosse **3** Größe] Grösse **4** Wert] Werth **5** in inf.,] in inf. **7** $S = \frac{1-e^n}{1-e} + e^n + e^{n+1} + \cdots$] *schon korrig. aus* $S = \frac{1-e^n}{1-e} = e^n + e^{n+1} + \cdots$ **7** in inf.,] in inf. **10** Wert] Werth **11** $\cdots$] ..... **13** Größe] Grösse **15** $\cdots$] .... **15** $\cdots$] .... **15** in inf.].] in inf.] **18** $\cdots$] ..... **18** in inf.],] in inf.] **23** *hat*] *hat*, **25** $\cdots$] .... **26** P_1] P_2 **27** Größe] Grösse

endliche Größe gebe, liegt sicher nichts Widersprechendes, weil sie sonst nicht als wahr sich erweisen ließe. Das Paradoxe aber, das man in ihr gewahren dürfte, geht nur daraus hervor, dass man vergisst, wie die hier zu addierenden Glieder immer kleiner und kleiner werden. Denn dass eine Summe von Addenden, deren jeder folgende z. B. die Hälfte von dem nächstvorhergehenden beträgt, nie mehr betragen könne, als das Doppelte des ersten, kann wohl niemand befremden, indem bei jedem auch noch so späten Gliede dieser Reihe zu jenem Doppelten

$$S = \frac{1-e^n}{1-e} + e^n[S - P_2] \tag{4}$$

oder

$$S[1-e^n] = \frac{1-e^n}{1-e} - e^n P_2\,,$$

oder endlich

$$S = \frac{1-e}{1-e} - \frac{e^n}{1-e^n} P_2. \tag{5}$$

Die beiden Gleichungen (3) und (5) geben durch Verbindung

$$\frac{-e^n}{1-e} + P_1 = \frac{-e^n}{1-e^n} \cdot P_2$$

oder

$$P_1 + \frac{e^n}{1-e^n} \cdot P_2 = +\frac{e^n}{1-e^n}\,,$$

woraus zu ersehen, dass, wenn wir n beliebig groß annehmen und dadurch den Wert von $\frac{e^n}{1-e^n}$ unter jede beliebige, auch noch so kleine Größe $\frac{1}{N}$ herabdrücken, auch jede der Größen P_1 und $\frac{e^n}{1-e^n} \cdot P_2$ für sich unter jeden beliebigen Wert herabsinken müsse. Ist aber dieses, so belehrt jede der beiden Gleichungen (3) und (5), dass, weil doch S bei einerlei e nur einen unveränderlichen Wert haben, somit nicht von n abhängen kann, $S = \frac{1}{1-e}$ sei.

1 Größe] Grösse **2** ließe] liesse **3** geht] gehet **4–5** addierenden] addirenden **9** niemand] Niemand **15** $\frac{1-e}{1-e}$] *schon korrig. aus* $\frac{1}{1-e}$ **15** P_2.] P_2 **17** $\frac{-e^n}{1-e^n} \cdot P_2$] $\frac{-e^n}{1-e^n} P_2$ **19** $P_1 + \frac{e^n}{1-e^n} \cdot P_2 = +\frac{e^n}{1-e^n}$] $P_1 + \frac{e^n}{1-e^n} P_2 = +\frac{e^n}{1-e}$ **19** ,] **20** groß] gross **21** Wert] Werth **21** $\frac{e^n}{1-e^n}$] $\frac{e^n}{1-e}$ **22** Größe] Grösse **22** Größen] Grössen **22–23** $\frac{e^n}{1-e^n} \cdot P_2$] $\frac{e^n}{1-e^n} P_2$ **23** Wert] Werth **24** dieses] Dieses **25** Wert] Werth

immer gerade so viel noch mangelt, als dieses letzte Glied beträgt.